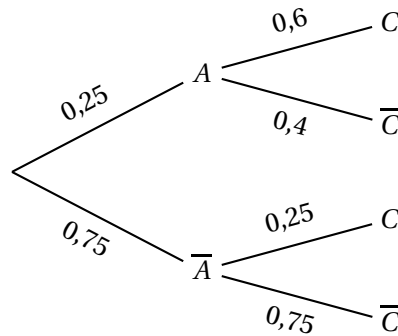


1. On complète l'arbre représentant la situation.



2. L'évènement « Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros » est  $\{A \cap C\}$ .

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,25 \times 0,6 = \boxed{0,15}$$

3. Les évènements  $A$  et  $\bar{A}$  forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C) = P(A) \times P_A(C) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(C) \\ &= 0,15 + 0,75 \times 0,25 = 0,15 + 0,1875 \\ &= \boxed{0,3375} \end{aligned}$$

4. On doit calculer la probabilité  $P_{\bar{C}}(\bar{A})$  :

$$P_{\bar{C}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{C})}{1 - P(C)} = \frac{0,75 \times 0,75}{1 - 0,3375} = \frac{0,5625}{0,6625} = \frac{45}{53} \approx 0,85.$$

La probabilité que le joueur ait pris une boule avec la lettre B sachant qu'il a obtenu un billet de 10 euros est environ 85%. L'affirmation est donc vraie.

5. La loi de probabilité de  $X_1$  est donnée par le tableau suivant :

$k_i$	10	50
$P(X_1 = k_i)$	0,6625	0,3375

L'espérance de  $X_1$  est donc :

$$E(X_1) = 10 \times 0,6625 + 50 \times 0,3375 = 6,625 + 16,875 = \boxed{23,5}$$

La variance de  $X_1$  est donc :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = (100 \times 0,6625 + 2500 \times 0,3375) - 23,5^2 \\ &= 66,25 + 843,75 - 552,25 = \boxed{357,75} \end{aligned}$$

6. a. On sait que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances; or  $X_1$  et  $X_2$  suivent la même loi, donc :

$$E(Y) = 2 \times E(X_1) = 2 \times 23,5 = \boxed{47}.$$

- b. Puisque la boule et le billet ont été remis, les deux tirages sont indépendants, donc les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes. Or on sait que la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances (propriété de l'additivité). On a donc :

$$\boxed{V(Y) = V(X_1) + V(X_2)} \text{ et donc } \boxed{V(Y) = 2 \times 357,75 = 715,5}$$

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième, ..., une centième partie.

On définit donc de la même façon les variables aléatoires  $X_3, X_4, \dots, X_{100}$ .

On note  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ .

Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on a :

- $E(Z) = E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \sum_{k=1}^{100} (E(X_k)) = 100 \times 23,5 = 2\,350$
- $V(Z) = V\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \sum_{k=1}^{100} (V(X_k)) = 100 \times 357,75 = 35\,775$

Pour tout réel  $t$  strictement positif, on a :  $P(|Z - E(Z)| \geq t) \leq \frac{V(Z)}{t^2}$ .

C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On en déduit que :  $P(|Z - E(Z)| < t) \geq 1 - \frac{V(Z)}{t^2}$ . Donc :  $P(|Z - 2\,350| < t) \geq 1 - \frac{35\,775}{t^2}$

$$|Z - 2\,350| < t \iff 2\,350 - t < Z < 2\,350 + t$$

Or on cherche  $P(Z \in ]1\,950 ; 2\,750[)$  donc on prendra  $t = 400$ .

On aura donc :  $P(Z \in ]1\,950 ; 2\,750[) \geq 1 - \frac{35\,775}{400^2}$ .

$1 - \frac{35\,775}{400^2} \approx 0,776 \geq 0,75$ . Donc la probabilité que  $Z$  appartienne à l'intervalle  $]1\,950 ; 2\,750[$  est supérieure ou égale à 0,75.